Fonction Gamma d'Euler

Extraits de WIKIPEDIA (encyclopédie sur le Net, un outil gratuit et super utile)

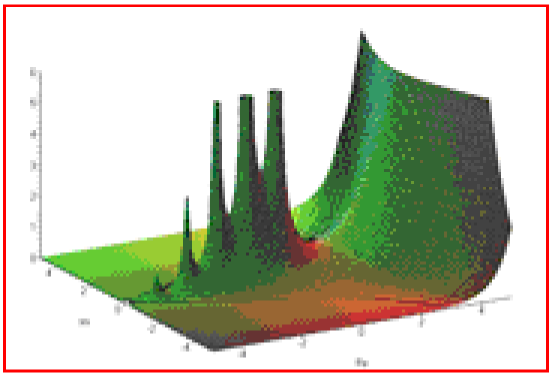
En mathématiques, la **fonction gamma** est définie dans le demi-plan complexe de partie réelle strictement positive par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

C'est la définition la plus fréquemment utilisée dans l'enseignement moderne, mais elle a été introduite initialement par Euler par la formule (équivalente) :

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^s}{(1+\frac{s}{n})}$$

avec **s** $\in$ **C/Z**$^-$



Lien avec la factorielle

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en particulier, comme $\Gamma(1) = 1$

Tout n $\in$ **N** $\Gamma(n+1) = n\,!$

Démonstration :

Il faut effectuer une intégration par parties sur

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t} dt$$

On utilise des fonctions *u* et *v* telles que :

$u(x) = t^x$ $\quad v'(x) = e^{-t}$

et

$u'(x) = xt^{x-1}$ $\quad v(x) = -e^{-t}$

La formule d'intégration par parties s'applique sur un segment **[a,A]** $\in$ **R**$^{+*}$**,** puis par passage à la limite il vient

$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

Lien avec les sommes de Gauss

L'intégrale apparaît comme une convolution entre un caractère additif (l'exponentielle) et un caractère multiplicatif

($x \to x^s$)

Formules remarquables incluant la fonction Gamma d'Euler

En plus d'interpoler la factorielle, la fonction Gamma fait apparaître de jolies formules telles que :

- la formule des compléments :

$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{sin(\pi s)}$ dont on déduit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (cf intégrale de Gauss)

- la formule de duplication de Legendre :

$$\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}) = 2^{1-2s}\Gamma(2s)\sqrt{\pi}$$

Cette fonction apparaît également dans des formules incluant la fonction Zeta de Riemann.

Formule asymptotique de Stirling

La formule de Stirling donne un *équivalent* de la fonction Gamma, et par conséquent de la factorielle, au voisinage de l'infini.

Pour la factorielle, elle s'écrit :

$$n\,! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

,

ou, pour une meilleure précision :

$$n\,! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}+\ldots..)$$

Caractérisation de la fonction gamma sur

La fonction gamma est entièrement caractérisée sur $\mathbf{R}^{+*}$ par les trois propriétés suivantes:

˜ **Γ(1) = *1***

∗ la fonction **log (Γ)** est convexe

∗ Pout tout x > 0 on a: **Γ(*x* + 1) = *x*Γ(*x*)**

Intégrale de Gauss

Pour tout réel strictement positif α, la fonction (paire) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}.$$

Cette intégrale est appelée intégrale de Gauss. Elle intervient dans la définition de la loi de probabilité appelée loi gaussienne, ou loi normale.

Intégrabilité de la fonction

- comme l'intégrande est pair, il suffit, pour montrer qu'il est intégrable sur $\mathbb{R}$, de prouver qu'il est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Cela résulte de ce qu'il est positif, continu, et négligeable à l'infini devant la fonction $x \mapsto x^{-2}$, intégrable par exemple sur $[1, +\infty[$.

Calcul de l'intégrale de Gauss

Cas particulier α = 1

La méthode classique de calcul utilise une intégrale double qu'on exprime en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.

Soient $G = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ et $H = \iint_{\mathbb{R}+\times\mathbb{R}+} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.

- Compte tenu de ce que les variables *x*, *y* se séparent :

$$H = \iint_{\mathbb{R}+\times\mathbb{R}+} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{e}^{-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, dy\right) = G^2$$

- On passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$; les variables *r*, *θ* se séparent elles aussi :

$$H = \iint_{\mathbb{R}+\times[0,\,\frac{\pi}{2}]} \mathrm{e}^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\, r\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

- On en déduit :

$G^2 = \frac{\pi}{4}$, d'où $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ puisque $G \geq 0$, et enfin : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = 2\,G = \sqrt{\pi}$ par parité.

Cas général

- En effectuant dans l'intégrale de Gauss le changement de variable défini par $x = \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Corollaire

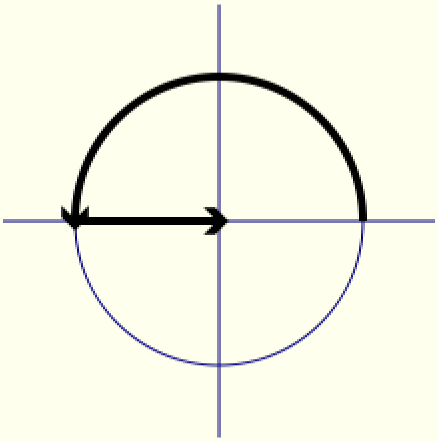
Le réel (une valeur de la fonction eulérienne Gamma) est égal à $\sqrt{\pi}$.

En effet, effectuant dans l'intégrale ci-dessus le changement de variable $t = x^2$, où $x > 0$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} 2\,x\,dx = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Nota : l'intégrande de l'intégrale de Gauss n'admet aucune primitive s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles (exponentielle, etc.). Ceci oblige pour calculer cette intégrale à recourir à des méthodes plus ou moins "détournées", dont la plus classique et directe est celle qui utilise des intégrales doubles ; une autre méthode classique (élémentaire, mais nettement plus longue), fait appel aux intégrales de Wallis.

Identité d'Euler



L'**identité d'Euler** est la relation suivante :

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

où e est la base du logarithme népérien, i est l'unité des imaginaires purs (vérifiant $i^2 = -1$) et π est la constante d'Archimède
(le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre).

L'identité apparaît dans le livre *Introduction* de Leonhard Euler, publié à Lausanne en 1748.

Dans la préface de l'un de ses cahiers, alors qu'il avait presque quinze ans, Richard Feynman, qualifia cette **identité de « formule la plus remarquable au monde ».**Feynman a trouvé cette formule remarquable parce qu'elle lie des constantes mathématiques fondamentales :

- $\boxed{z \in \mathbb{C} \quad e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}$).

La formule comporte également les opérations arithmétiques fondamentales d'addition, de multiplication et d'élévation à une puissance. Cette formule est un cas particulier de la formule d'Euler en analyse complexe :

Pour tout nombre réel x ,
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

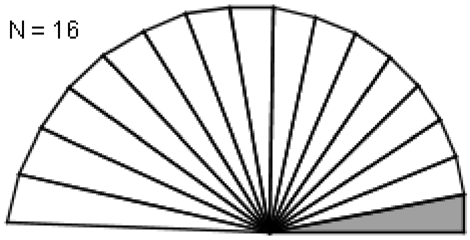
(moyen mnémotechnique: **cis**(x) = **c**os(x)+***i*** **s**in(x))

Si nous posons $x = \pi$, alors

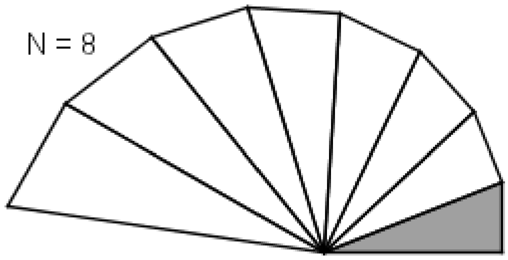
$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

et puisque $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$, nous obtenons

$e^{i\pi} = -1$ et par conséquent, $e^{i\pi} + 1 = 0$



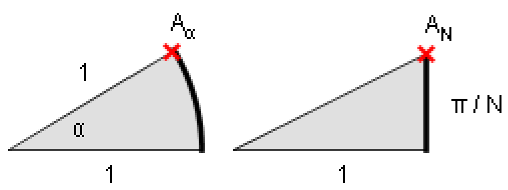
Juxtaposition de 16 triangles rectangles

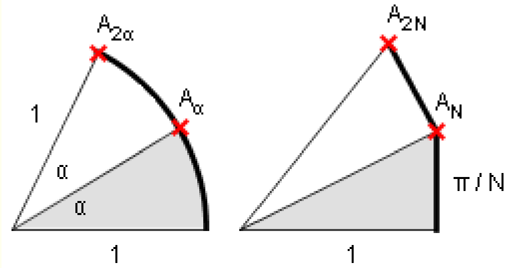


Juxtaposition de 8 triangles rectangles

- L'interprétation géométrique est issue de $e^{i\pi} \simeq (1 + \dfrac{i\pi}{N})^N \simeq -1$

à partir du germe suivant réitéré N fois





En effet, d'une part, $z \in \mathbb{C} \quad e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ et d'autre part les multiplications complexes se traduisant par des rotations, le point de coordonnées $\left(1 + \dfrac{i\pi}{N}\right)^N$ est obtenu en juxtaposant N triangles rectangles comme indiqué sur la figure ci-contre.

Aussi belle et mystérieuse qu'est cette identité d'Euler, on comprend mieux géométriquement pourquoi, lorsque N tend vers ∞, le point d'affixe $e^{i\pi}$ est égal à $(-1, 0)$

Une autre identité d'Euler en analyse à plusieurs variables

L' identité d'Euler est la relation suivante :

Si $f(x_1,x_2,...,x_n)$ est une fonction de classe C^1 homogène de degré k, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$$